

Κβαντομηχανική II

Κωνσταντίνος Σφέτσος,
Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφάλαιο 5: Σύνθεση στροφορμών

15 Μαΐου 2021

Περιεχόμενα

- ▶ Γενική θεώρηση
- ▶ Ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις ολικής στροφορμής
- ▶ Παραδείγματα

Γενική θεώρηση

- ▶ Επειδή η στροφορμή είναι **κβαντισμένη** η **πρόσθεση στροφορμών** δεν γίνεται όπως με τα κλασικά διανύσματα.
- ▶ Ένα σωματίο, βλ. το ηλεκτρόνιο, μπορεί να έχει τόσο **τροχιακή** όσο και **ιδιοστροφορμή**. Έχει έννοια να γνωρίζουμε την **ολική στροφορμή**.
- ▶ Υπάρχουν Χαμιλτονιανές που **δεν εναλλάσσονται** ξεχωριστά με τις **επιμέρους**, αλλά με την **ολική στροφορμή**.

Θεωρούμε **δύο** φυσικά μεγέθη με ιδιότητες **στροφορμής**, δηλαδή

$$\{J_{1a}, J_{2b}\} : [J_{1a}, J_{1b}] = i\hbar\epsilon_{abc}J_{1c} , [J_{2a}, J_{2b}] = i\hbar\epsilon_{abc}J_{2c}.$$

Τελεστές για **διαφορετικά** μεγέθη **μετατίθεται**, $[J_{1a}, J_{2b}] = 0$.

- ▶ Συμβολίζουμε τις **κοινές ιδιοκαταστάσεις** των $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ με

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle , |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle , \quad j_1, j_2 \in \mathbb{Z}/2 .$$

$$m_1 = -j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1 , \quad m_2 = -j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2 .$$

- ▶ Αυτές αποτελούν ένα **πλήρες ορθοκανονικό σύνολο**

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j'_1 j'_2 m'_1 m'_2 \rangle = \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} ,$$

$$\sum_{j_1, j_2} \sum_{m_1 = -j_1}^{j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{j_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2| = \mathbb{I} .$$

Ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις ολικής στροφορμής

- ▶ Ο τελεστής

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 ,$$

ικανοποιεί την **άλγεβρα της στροφορμής**, δηλαδή

$$[J_a, J_b] = i\hbar\epsilon_{abc}J_c .$$

- ▶ Μπορούμε να **διαγωνοποιήσουμε ταυτόχρονα** τους τελεστές $\{\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2\}$. Σημειώνω ότι $[\mathbf{J}^2, J_{1z}] \neq 0$.
- ▶ Οι ιδιοκαταστάσεις θα είναι της μορφής $|j_1 j_2 j m\rangle$ και θα είναι ορθοκανονικές

$$\langle j_1 j_2 j m | j'_1 j'_2 j' m' \rangle = \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{j j'} \delta_{m m'} .$$

Υπολογισμός των συντελεστών Clebsch-Gordan:

- ▶ Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση μεταξύ των δύο βάσεων

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{j'_1 j'_2, m'_1, m'_2} |j'_1 j'_2 m'_1 m'_2\rangle \underbrace{\langle j'_1 j'_2 m'_1 m'_2 | j_1 j_2 j m\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan}} .$$

- ▶ Λόγω της ορθοκανονικότητας

$$\begin{aligned} m\hbar \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle &= \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J_z | j_1 j_2 j m\rangle \\ \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J_{1z} + J_{2z} | j_1 j_2 j m\rangle &= \hbar(m_1 + m_2) \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \end{aligned}$$

Άρα

$$m = m_1 + m_2 .$$

- ▶ Επίσης

$$\begin{aligned} \hbar^2 j_1(j_1 + 1) \langle j'_1 j'_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle &= \langle j'_1 j'_2 m_1 m_2 | \mathbf{J}_1^2 | j_1 j_2 j m\rangle \\ &= \hbar^2 j'_1(j'_1 + 1) \langle j'_1 j'_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle . \end{aligned}$$

Άρα

$$j'_1 = j_1 , \quad j'_2 = j_2 .$$

Άρα οι συντελεστές Clebsch-Gordan έχουν την μορφή

$$\langle j_1' j_2' m_1 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle = \delta_{j_1' j_1} \delta_{j_2' j_2} \delta_{m, m_1 + m_2} C_{j_1, m_1; j_2, m_2}^{j, m}.$$

Γράφουμε

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 + m_2 = m} C_{j_1, m_1; j_2, m_2}^{j, m} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle.$$

Δυνατές τιμές των m και j :

- ▶ Η μέγιστη τιμή του m είναι $m_{\max} = j_1 + j_2$. Άρα η μέγιστη τιμή του j είναι

$$j_{\max} = j_1 + j_2.$$

Η τιμή είναι συμβατή και με το γεγονός ότι $m_{\min} = -j_1 - j_2$.

- Η ελάχιστη τιμή j_{\min} βρίσκεται απαιτώντας ότι ο αριθμός καταστάσεων είναι ο ίδιος με όποια βάση.

$$\begin{aligned}(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) &= \sum_{j=j_{\min}}^{j_1+j_2} (2j + 1) = \sum_{n=0}^{j_1+j_2-j_{\min}} (2n + 2j_{\min} + 1) \\ &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - j_{\min}^2.\end{aligned}$$

Άρα

$$j_{\min} = |j_1 - j_2|.$$

Γενική κατασκευή καταστάσεων

Με δεδομένα j_1, j_2 ο τρόπος κατασκευής των καταστάσεων είναι:

- ▶ Ξεκινούμε απ' την κατάσταση μέγιστων j και m . Αυτή σχηματίζεται μοναδικά ως

$$|j_1 j_2 j_{\max} j_{\max}\rangle = |j_1 j_2 j_1 j_2\rangle .$$

- ▶ Δρώντας με τον J_- κατασκευάζουμε όλες τις καταστάσεις

$$|j_1 j_2 j_{\max} m\rangle , \quad m = j_{\max} , j_{\max} - 1 , \dots , j_{\min} .$$

- ▶ Επιλέγουμε την $|j_1 j_2, j_{\max} - 1, j_{\max} - 1\rangle$ ώστε να είναι ορθογώνια στην $|j_1 j_2, j_{\max}, j_{\max} - 1\rangle$.
- ▶ Κατασκευάζουμε τις υπόλοιπες καταστάσεις με $j = j_{\max} - 1$ δρώντας με τον τελεστή J_- .

- ▶ Επιλέγουμε την $|j_1 j_2, j_{\max} - 2, j_{\max} - 2\rangle$ ώστε να είναι ορθογώνια στην $|j_1 j_2, j_{\max}, j_{\max} - 2\rangle$ και στην $|j_1 j_2, j_{\max} - 1, j_{\max} - 2\rangle$. Κατασκευάζουμε τις υπόλοιπες καταστάσεις δρώντας με τον τελεστή J_- .
- ▶ Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι την ελάχιστη τιμή $j_{\min} = |j_1 - j_2|$.

Παραδείγματα

Σύνθεση στροφορμής δύο ηλεκτρονίων

Σε αυτή την περίπτωση: $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$. Οι δυνατές τιμές του $j = 0, 1$. Για απλότητα γράφουμε

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle = |\pm\rangle |\pm\rangle ,$$

για όλους τους 4 συνδιασμούς.

- ▶ Με δύο σπιν πάνω έχουμε: $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ και $j = m = 1$.
Άρα

$$|11\rangle = |+\rangle |+\rangle .$$

Γνωρίζουμε ότι

$$J_{\pm} |\mp\rangle = |\pm\rangle .$$

- Δρώντας με τον $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ παίρνουμε

$$J_- |11\rangle = (J_{1-} + J_{2-})|+\rangle|+\rangle = (J_{1-}|+\rangle)|+\rangle + |+\rangle(J_{2-}|+\rangle) ,$$

με αποτέλεσμα

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle|+\rangle + |+\rangle|-\rangle) .$$

- Δρώντας πάλι με τον J_- έχουμε

$$J_- |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle(J_{2-}|+\rangle) + (J_{1-}|+\rangle)|-\rangle) ,$$

με αποτέλεσμα

$$|1, -1\rangle = |-\rangle|-\rangle .$$

- Η κατάσταση $|00\rangle$ ορθογώνια στην $|10\rangle$ είναι

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) .$$

Τελικά, η σύνθεση του σπιν 2 ηλεκτρονίων δίνει:

$$\text{singlet : } |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) .$$

και

$$\begin{aligned} \text{triplet : } |11\rangle &= |+\rangle|+\rangle \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) . \\ |1, -1\rangle &= |-\rangle|-\rangle . \end{aligned}$$

Σύνθεση τροχιακής και ιδιοστροφορμής

Έχουμε: $j_1 = \ell = 1, 2, \dots$ και $j_2 = \frac{1}{2}$, οπότε $j = \ell \pm \frac{1}{2}$.

- ▶ Έχουμε την κατάσταση

$$|\ell, \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\rangle = |\ell\ell\rangle|+\rangle.$$

- ▶ Δρώντας με τον τελεστή J_- κατασκευάζουμε τις

$$|\ell, \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m}{2\ell + 1}} |\ell, m - \frac{1}{2}\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m}{2\ell + 1}} |\ell, m + \frac{1}{2}\rangle|-\rangle$$

$$m = -(\ell + \frac{1}{2}), -\ell + \frac{1}{2}, \dots, \ell + \frac{1}{2}.$$

- ▶ Απαιτώντας ορθογωνιότητα με την $|\ell, \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, m\rangle$, έχουμε

$$|\ell, \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m}{2\ell + 1}} |\ell, m - \frac{1}{2}\rangle|+\rangle - \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m}{2\ell + 1}} |\ell, m + \frac{1}{2}\rangle|-\rangle$$

$$m = -(\ell - \frac{1}{2}), -\ell + \frac{3}{2}, \dots, \ell - \frac{1}{2}.$$

Κριτήριο επιλογής βάσης

Η επιλογή της βάσης $|j_1 j_2 j m\rangle$ έναντι της $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ γίνεται με κριτήριο η Χαμιλτονιανή να εναλλάσσεται με την ομάδα τελεστών που διαγωνοποιείται στην αντίστοιχη βάση.

- ▶ Για τον τελεστή $[\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, L_z] \neq 0$ και $[\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, S_z] \neq 0$. αλλά $[\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, J_z] = 0$. Έχουμε

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) .$$

- ▶ Άρα έχουμε

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | \ell, \frac{1}{2}, j, m \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] | \ell, \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, m \rangle .$$

- ▶ Για την περίπτωση ηλεκτρονίου $s = \frac{1}{2}$ και $j = \ell \pm \frac{1}{2}$, οπότε

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | \ell, \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, m \rangle = \hbar^2 \frac{\ell}{2} | \ell, \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, m \rangle ,$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} | \ell, \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}, m \rangle = -\hbar^2 \frac{\ell + 1}{2} | \ell, \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}, m \rangle .$$